「非線型非平衡状態の統計力学」報告

基研長期研究計画「非線非平衡状態の統計力学」の一環として去る6月に拡大世話人会を行った。この際の報告のうち，8月16日現在手許にとどいた分を以下掲載する。

非線型過程に関する二三の話題

東大理　久保亮五

特にまとまった話をもち合せないので思いつくまま，二三の話題を提供したい。

§1. 非線型緩和に伴なうゆらぎの異常について

一般に，不安定状態から安定状態へ移る過程においては，ゆらぎが異常に大きくなることは，マクロ変数の発展方程式

$$\dot{y} = c_1(y) \tag{1}$$

$$\dot{\sigma} = 2c_1'(y)\sigma + c_2(y) \tag{2}$$

から容易に証明される（Kubo，Matsuo，Kitahara，J. Statistical Physics 9 51 (1973) § 7 ）。これは，レーザー発振について見られていたが，最近非線型回路の発振についても，そのゆらぎが方程式 (1)，(2) によってよく記述されることが実験的に証明された。(Kabashima，Kawakubo，J. Phys. Soc. Japan in press)。

これに関連する注意を一つ述べる。緩和 $c_1(y)$ が線型でない場合，たとえば

$$c_1(y) = F - r_1 y - r_3 y^3 \tag{3}$$

のような場合，不安定ー安定移行の場合ほど顕著ではないが，ゆらぎ σ は一般に複雑で，初期条件の如何によって増大，減少などの異常を見せ，臨界的条件ではいっそう強調さ

れる。その様子を見るために，(1)から得られる関係

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2c_1'\sigma + c_2}{c_1} \tag{4}$$

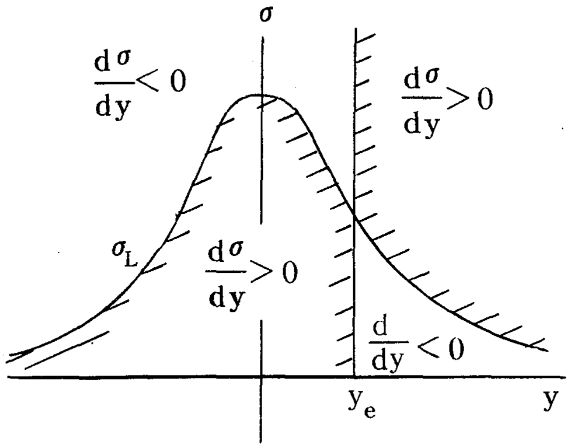
をしらべる。$\sigma - y$平面上で曲線Lとして

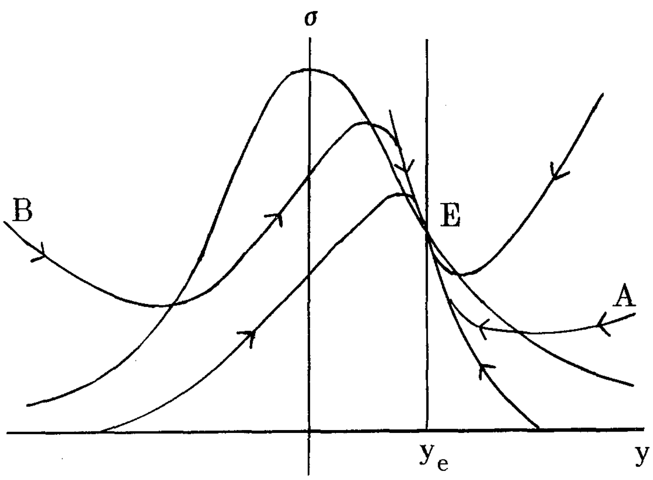
$$\sigma_L = -c_2/2c_1' \tag{5}$$

を描く。Lと，直線$y = y_e$ ($c_1(y_e) = 0$)によって分けられる各領域は，$d\sigma/dy$の符号を異にする。第1図は(3)の例である。また，平衡点，(y_e，σ_e)に近づくとき，(4)から

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_e = 2\,\frac{d\sigma_L}{dy}$$

となるから，初期値，y_o，σ_oに応じてたとえば第2図のA→ E，B→ Eのように，σはyの緩和とともに曲折ある変化をする。





§ 2　ガウス的変調の連分数表示

random frequency modulation $\omega(t)$があるとき，

$$\int_t^{\infty} \phi(t) e^{-st}\, dt = \phi[s] \qquad \phi(t) = \langle \exp i \int_0^t \omega(t')\, dt' \rangle$$

で定義された $\phi[s]$ はきれいな形の連分数表示をもつ。もっと一般に

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Gamma(\omega) f$$

という stochastic Liouville eq. で基本的な確率過程 $\omega(t)$ が Gaussian - Markoff 過程であり，且つ Γ が ω について1次であれば（Γ は一般に演算子であるが），演算子としての連分数表示が可能である。たとえば，ポテンシャル V の場における粒子の Brown 運動

$$\frac{dx}{\sigma t} = p, \qquad \frac{db}{dt} = -\frac{\sigma v}{\sigma t} + R, \qquad R = \text{Gaussian white noise}$$

は Kramers eq.

$$\frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} = \left[-\frac{2}{\partial x} p + V'(x) \frac{2}{\partial p} + r \frac{2}{\partial p} \left(p + T \frac{2}{\partial p} \right) \right] f$$

で記述されるが，初期分布を

$$f(x, p, o) = g_0(x) \varphi_0(p) \qquad \varphi_0(p) = C \exp(-p^2/2T)$$

とすれば，

$$g(x, t) = \int f(x, p, t)\, dp, \qquad g[x, s] = \int_0^{\infty} e^{-st} g(x, t) dt$$

について，

$$g[x, s] = \cfrac{1}{S - T\dfrac{\partial}{\partial x} \cfrac{1}{s + r - 2T\dfrac{\partial}{\partial x} \cfrac{1}{s + 2r - 3T\dfrac{\partial}{\partial x} \cfrac{1}{s + 3r ---} A} A} A} g_0(x)$$

ただし　　$A = e^{-\frac{V}{T}} \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{V}{T}}$

という連分数表示が成立つ。この導出には，Gauss－Markoffian 過程の演算子

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(p + T\frac{\partial}{\partial p} \right)$$

の国有関数がHermite多項式によって与えられることを利用すればよい。連分数表示は，ある見通しのよさと，数値計算上の利便をもつ。

§3，２次光学過程と中間状態のランダム変調

ラマン効果，２光子遷移等は電磁場に対する物質の３次のレスポンスである。そのような高次のレスポンスを，線型レスポンス理論の拡張として扱うことは興味ある問題であるが，もちろん線型の場合にはない種々の複雑さを含んでいる。たとえば共鳴ラマン効果と，ルミネッセンスの関係などは近年議論の多いところである。中間状態が確率過程として変調されるものとしてこの問題を以前取扱ったが，充分な結果に達しなかった（高河原：修士論文 1974）。最近またこの問題を取上げているので，わかったこと，わからないことを二三コメントした。

不可逆過程の古典的及び量子的変分原理

名大工　中　野　藤　生

§序言

ボルツマン方程式に，不可逆過程の典型的性格が少からず反映している。とくに定常状態におけるエントロピー生成率に関連した変分原理はその最も基本的なものである。その内容をできるだけ簡潔十分に述べておきたい。

ボルツマン方程式という現象論的段階を越えて原子力学的段階にまでさかのぼるとき，変分原理がどのように修正されるかという点を次に論ずる。原子力学的段階の基本方程